1 Berechnen Sie für $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ die Vektoren:

1.1 $\vec{v} \circ \left(\vec{u} \times \vec{w}\right)$ -167

1.2 $\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \times \vec{w}$ $\begin{pmatrix} 87 \\ 37 \\ 78 \end{pmatrix}$

1.3 $\vec{u} \times \left(\vec{v} \times \vec{w}\right)$ $\begin{pmatrix} -25 \\ -53 \\ 117 \end{pmatrix}$

1.4 Sind $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig? ja

2 Die Ebene ist durch die Punkte $A\left(3;2;-4\right)$, $B\left(2;1;1\right)$ und $C\left(2;-2;4\right)$ gegeben.

2.1 Geben Sie eine Parameterform der Ebene an. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

2.2 Geben Sie eine Normalenform an. $4x_1 + x_2 + x_3 - 10 = 0$

3 Zeigen Sie, dass für orthogonale Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die Gleichung des Pythagoras gilt: $\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2$. nachrechnen

4 Der Vektor $\vec{F} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 56 \end{pmatrix}$ soll in eine Normal- und eine Parallelkomponente zur Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ zerlegt werden.

$F_n = \begin{pmatrix} -15 \\ 30 \\ 21 \end{pmatrix}$, $F_p = \begin{pmatrix} 21 \\ -14 \\ 35 \end{pmatrix}$

5 Geben Sie zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren an, die zum Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ und auch untereinander orthogonal sind.

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -15 \\ 21 \\ 74 \end{pmatrix}$$

6 Gegeben sind zwei Basen des $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{V} = \left(\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ und } \mathbf{W} = \left(\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

6.1 Wie lautet die Darstellung des in der Basis **V** gegebenen Vektors $\vec{u} = 5 \cdot \vec{v}_1 + 1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathbf{V}}$ in der Basis **W**?

$$\begin{pmatrix} \frac{19}{7} \\ \frac{-29}{7} \end{pmatrix}_{\mathrm{W}}$$

6.2 Bestimmen Sie die Übergangsmatrix der Basistransformation von der Basis **V** in die Basis **W**.

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

6.3 Bestimmen Sie die Übergangsmatrix der Basistransformation von der Basis **W** in die Basis **V**.

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

7 Gegeben ist die Ebene $\mathrm{E}: 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 7 = 0$. Finden Sie eine Basis $\mathbf{V} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ des $\mathbb{R}^3$ so, dass $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ in Richtung von E zeigen, $\vec{v}_3$ normal zu E ist und alle Vektoren die gleiche Länge haben.

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; \vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$